Licence E.E.A.
Lieu d'Evans

1 Principe

Soit un polynôme

$$a_n x_n + \ldots + a_0 = 0$$

avec $a_n \neq 0$ implique n racines.
Supposons que

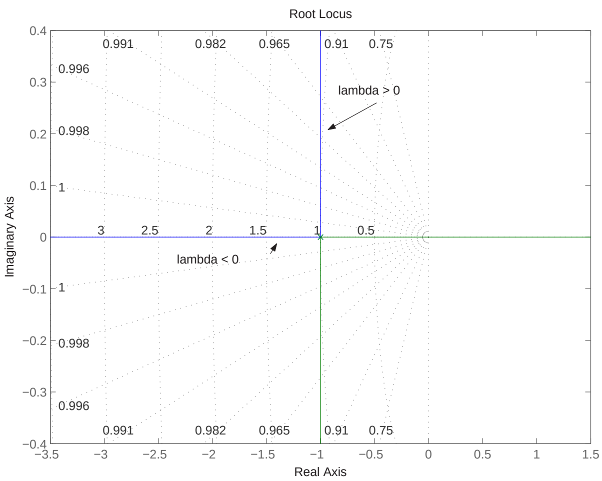
$$\forall i \qquad a_i = \alpha_i + k\beta_i \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{C}$$

On peut écrire :

$$D(x) + kN(x) = 0 \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} D(x) & = & \alpha_p x^p + \ldots + \alpha_0 \\ N(x) & = & \beta_z x^z + \ldots + \beta_0 \end{array} \right.$$

Degré de $D = P$
Degré de $N = Z$
et bien sùr $\max(P, Z) = n$
Les racines de cette équation varient en fonction du paramètre k, elles décrivent alors un lieu appelé lieu d'Evans dans le plan complexe.

Exemples $(x+1)^2 + \lambda = 0$
Si $\lambda < 0$ $(x + 1 - \sqrt{\lambda})(x + 1 + \sqrt{\lambda}) = 0$
Si $\lambda > 0$ $(x + 1 - j\sqrt{\lambda})(x + 1 + j\sqrt{\lambda}) = 0$



2 Construction du lieu d'Evans

2.1 Propriétés géométriques

1. Cette équation admet, soit des racines réelles ($\rightarrow$ sur l'axe réel), soit des racines complexes conjuguées ($\rightarrow$ lieu symétrique par rapport à l'axe réel)

2. La variation d'un racine de l'équation s'appelle une branche, le degrés du polynôme étatn n, on à $2 \times n$ branches (car $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$).
3. Conditions des angles et des modules :
   Il y a p pôles,donc on peut écrire $D(x) = \alpha_p \prod_{i=1}^{P}(x - p_i)$, de même z zéros : $N(x) = \beta_z \prod_{j=1}^{Z}(x - z_j)$ on peut donc écrire

$$\prod_{i=1}^{p}(x - p_i) + \lambda \prod_{j=1}^{z}(x - z_j) = 0$$

avec $\lambda = \frac{\beta_z}{\alpha_p}$ où

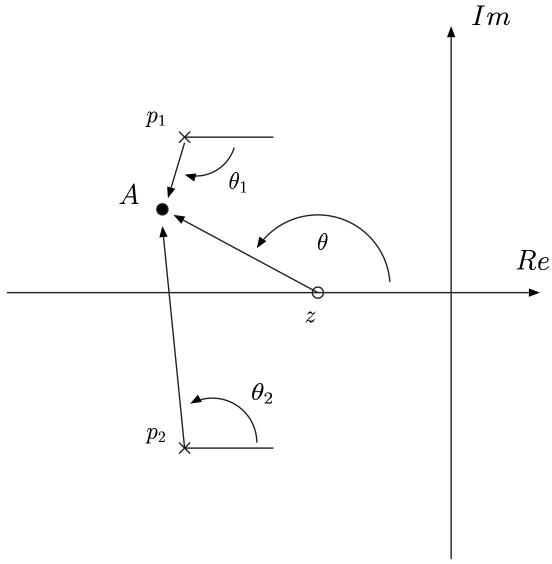
$$\frac{\prod_{j=1}^{Z}(x - z_j)}{\prod_{i=1}^{P}(x - p_i)} = -\frac{1}{\lambda}$$

puis en passant aux arguments :
Conditions des angles

$$\sum_{j=1}^{Z} \arg(x - z_j) - \sum_{i=1}^{P} \arg(x - p_i) = 2k\pi \quad (\lambda < 0)$$

$$\sum_{j=1}^{Z} \arg(x - z_j) - \sum_{i=1}^{P} \arg(x - p_i) = (2k+1)\pi \quad (\lambda > 0)$$

Elle est indépendante de λ : c'est l'équation du lieu en angle.



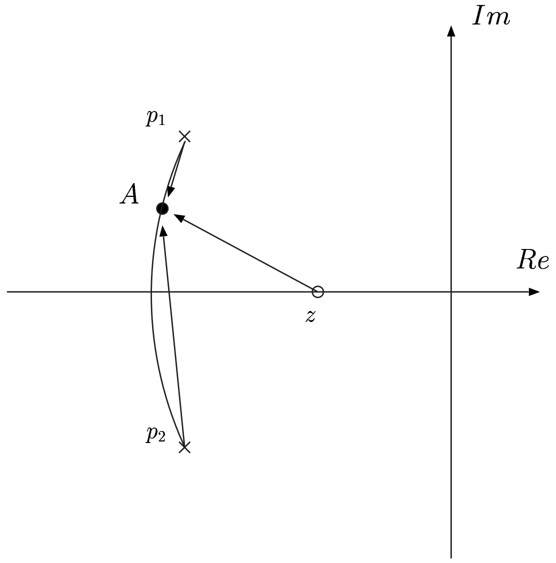
$A \in$ lieu d'Evans si :

$$\theta + \theta_1 - \theta_2 = k\pi$$

Conditions de modules

$$\frac{\prod_{j=1}^{Z} |x - z_j|}{\prod_{i=1}^{P} |x - p_i|} = \frac{1}{|\lambda|}$$

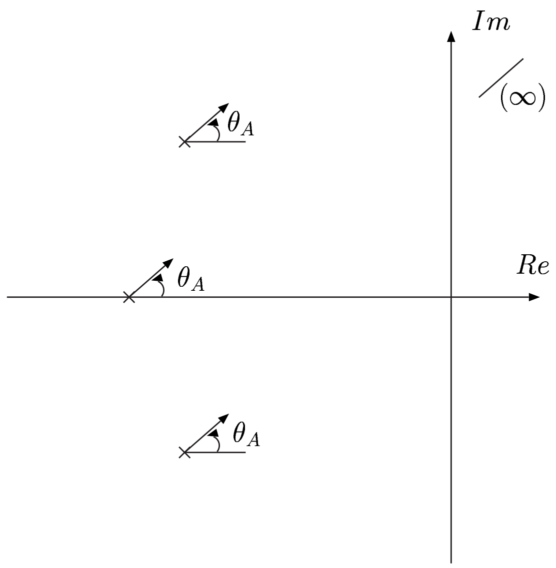
elle permet de calculer la valeur de λ correspondant à un point donné du lieu :



$$\frac{1}{|\lambda|} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{AP_1}.\overline{AP_2}}$$

d'ou λ

4. Points de départ et points d'arrivée : $D(n) + kN(x) = 0$
   Départ : $k = 0 \quad \Rightarrow \quad D(x) = 0$ points de départs = racines de $D(x)$ = pôles.
   Arrivée : $k \to \infty \quad N(x) = -\frac{1}{k}D(x) \to 0$ points d'arrivée = racines de $N(x)$ = zéros.
   On part des pôles pour arriver aux zéros.
   S'il «manque» $(Z \neq P)$ des pôles ou des zéros, ils sont rejetés à l'infini. On a donc $|p - z|$ branches infinies.
5. Directions asymptotiques et asymptotes
   Pour déterminer les directions de ces branches infinies ; à l'infini tout le monde regarde dans la même direction.



avec les conditions des angles : $(Z - P)\theta_A = k\pi$, si $Z \neq P \quad \theta_A = \frac{k\pi}{Z-P}$.

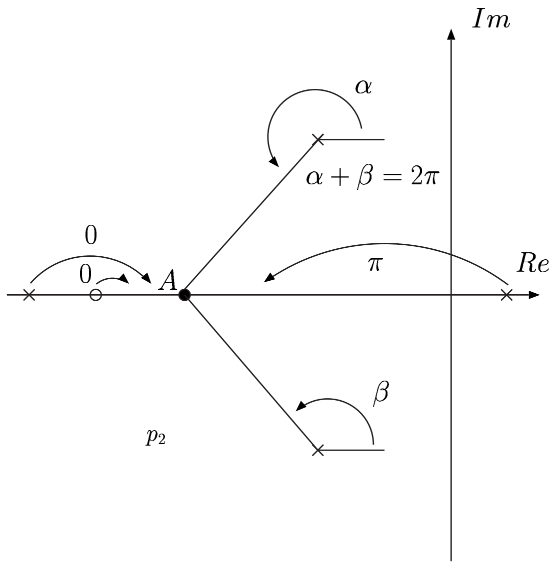
Par exemple :

$P-Z$	1	2	3
θ_A	$k\pi$	$\frac{k\pi}{2}$	$\frac{k\pi}{3}$
direction asymptotique	$0, \pi$	$-\frac{\pi}{2}, 0$ $\frac{\pi}{2}, \pi$	$-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, 0$ $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \pi$

L'intersection des asymptotes avec l'axe réel se fait en :

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{P} p_i - \sum_{j=1}^{Z} z_j}{P-Z}$$

6. Branches de lieu $\in$ l'axe réel.



Pour tout point A situé sur l'axe réel, la contribution à la conditions des angles des pôles et des zéros placés à gauche de A est nulle, tandis que celle de chaque pôle et zéro à droite de A est π.

La contribution des pôles et des zéros complexesest nulle comme le montre la figure, car l'argument est de 2π par paires de pôles ou zéros conjugués.
Soit p_1 le nombre de pôle à droite de A
Soit z_1 le nombre de zéro à droite de A

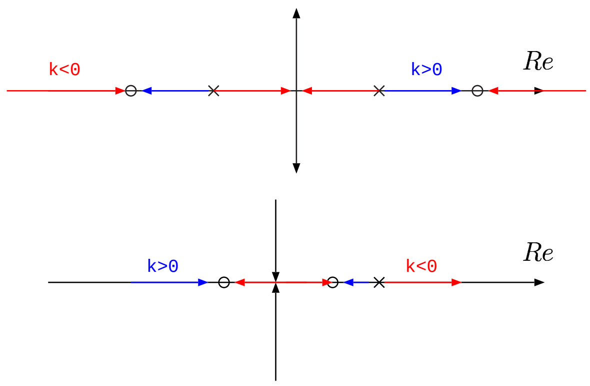
$$z_1\pi - p_1\pi = 2k\pi \quad (k < 0)$$

$$z_1\pi - p_1\pi = (2k+1)\pi \quad (k > 0)$$

$$z_1 - p_1 = 2k \quad (k < 0)$$

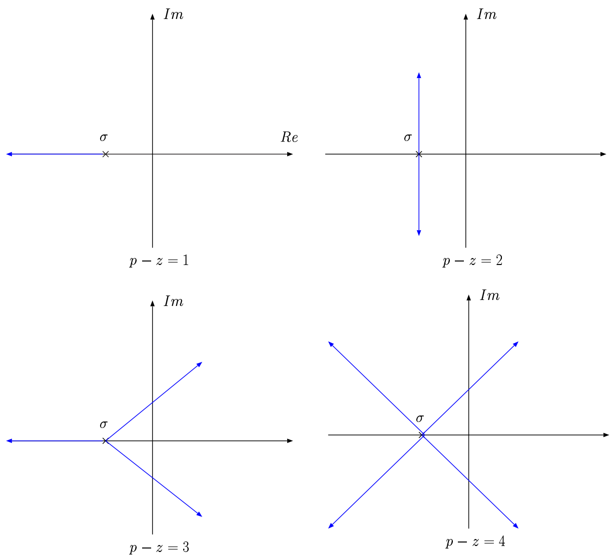
$$z_1 - p_1 = 2k+1 \quad (k > 0)$$

Si la somme des pôles et des zéros sur l'axes réel, à droite du point considéré est **paire**, ce point est élément du lieu pour $k < 0$
Si la somme des pôles et des zéros sur l'axes réel, à droite du point considéré est **impaire**, ce point est élément du lieu pour $k > 0$
Exemple :

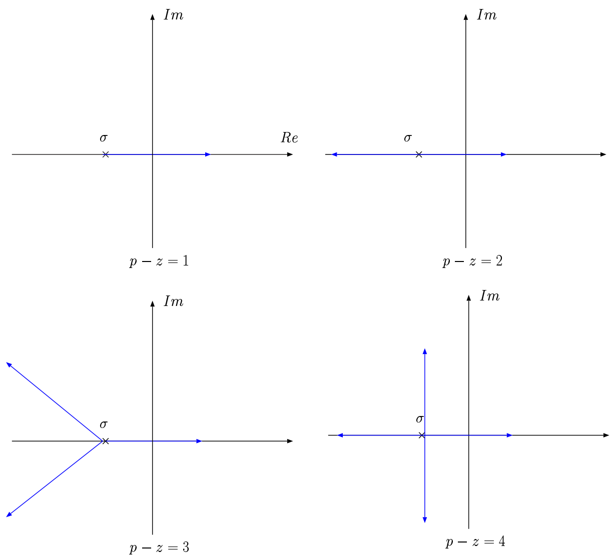


Diverses configuration d'asymptotes :

- $k \rightarrow +\infty$



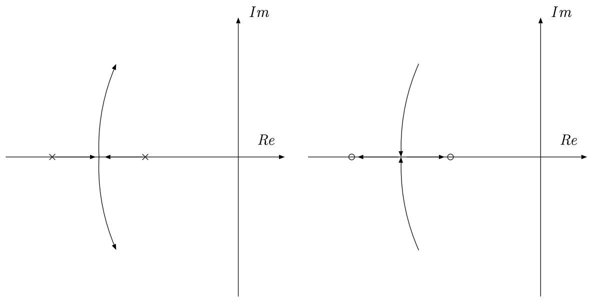
- $k \rightarrow -\infty$



7. Point de séparation et de jonction
   Ces points sont les racines double de l'équation $D(x) + kN(x) = 0$, ils sont aussi

solutions de la dérivée de celle-ci donc $dD + kdN = 0$, on a $k = -\frac{D}{N} \Rightarrow \frac{dN}{N} = \frac{dD}{D}$ c'est à dire $d(\ln N) = d(\ln D)$ ce qui donne finalement :

$$\sum_{i=1}^{P} \frac{1}{x_0 - p_i} = \sum_{i=j}^{Z} \frac{1}{x_0 - z_j}$$



2.2 Équation analytique

Dans le plan complexe : $x = \alpha + j\omega$ en écrivant

$$D(x) = RD(\alpha,\omega) + jID(\alpha,\omega)$$

$$N(x) = RN(\alpha,\omega) + jIN(\alpha,\omega)$$

$$D(x) + kN(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} RD(\alpha,\omega) + kRN(\alpha,\omega) & = & 0 \\ ID(\alpha,\omega) + kIN(\alpha,\omega) & = & 0 \end{cases}$$

En éliminant k on a :

$$k = -\frac{RD}{RN} = -\frac{ID}{IN}$$

le lieu a donc pour équation :

$$RN(\alpha,\omega)ID(\alpha,\omega) - RD(\alpha,\omega)IN(\alpha,\omega) = 0$$

En général ceci est résoluble en $\omega = f(\alpha)$ et on trouve toujours $\omega = 0$ (axe réel).

Remarques

1. ω doit se mettre en facteur : car tout l'axe des réels est $\in$ du lieu ;
2. dans le reste (sans ω) fonction bicarrée en ω puisque symétrique par rapport à l'axe des réels ;
3. les pôles doubles sont $\in$ de l'axe + un lieu en dehors de l'axe.

3 Exemple

Soit le polynôme dépendant d'un paramètre λ :

$$x^3 + 6x^2 + 10x + \lambda(x+4) = 0 \quad (x \in \mathbb{C})$$

$$D(x) = x^3 + 6x^2 + 10x = x(x^2 + 6x + 10)$$

$\Delta = 36 - 40 = -4$, $p_1 = -3 + j$, $p_2 = -3 - j$ et $p_0 = 0$
3pôles et un zéro $\Rightarrow P - Z = 2$, Degré 3, $\Rightarrow$ 3 branches dont 2 infinies.
3 points de départs, p_0, p_1, p_2 et un point d'arrivée $z_0 = -4$.
Direction asymptotiques : $\theta_A = \frac{k\pi}{2} \Rightarrow 4 : 0, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ et π.
Point de concours des asymptotes : $a = \frac{0-3+j-3-j+4}{2} = -1$
$\lambda > 0 \qquad [-4, 0]$ $\lambda < 0 \qquad]-\infty, -4] \cup [0, +\infty[$
Équation du lieu :

$$x^3 + 6x^2 + 10x + \lambda(x + 4) = 0 \qquad x = \alpha + j\omega$$

$$RD = \alpha^2 - 3\alpha\omega^2 + 6\alpha^2 - 6\omega^2 + 10\alpha$$

$$ID = \omega(3\alpha^2 - \omega^2 + 12\alpha + 10)$$

$$RN = \alpha + 4$$

$$IN = \omega$$

d'où avec $RN(\alpha, \omega)ID(\alpha, \omega) - RD(\alpha, \omega)IN(\alpha, \omega) = 0$

$$(\alpha + 4)(\omega(3\alpha^2 - \omega^2 + 12\alpha + 10)) - (\alpha^2 - 3\alpha\omega^2 + 6\alpha^2 - 6\omega^2 + 10\alpha)\omega = 0$$

$$\omega(-\alpha^3 + 3\alpha\omega^2 - 6\alpha^2 + 6\omega^2 - 10\alpha) + (\alpha + 4)(3\alpha^2 - \omega^2 + 12\alpha + 10)$$

$\omega = 0$ nous donne l'axe des réels comme lieu et il reste

$$2\alpha^3 + 2\alpha\omega^2 + 18\alpha^2 + 2\omega^2 + 48\alpha + 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$2\omega^2(\alpha + 1) = -2\alpha^3 - 18\alpha^2 - 48\alpha - 40$$

d'où le lieu

$$\omega^2(\alpha + 1) = -\alpha^3 - 9\alpha^2 - 24\alpha - 20$$

Les points de séparations ou de jonction sont donnés avec $\omega = 0$ c'est à dire ici

$$\alpha^3 + 9\alpha^2 + 24\alpha + 20 = 0$$

avec $\alpha = -5$ solution évidente donc

$$(\alpha + 5)(\alpha^2 + 4\alpha + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(\alpha + 5)(\alpha + 2)^2 = 0$$

nous avons aussi :

$$\omega^2 = \frac{(\alpha + 5)(\alpha + 2)^2}{(\alpha + 1)}$$

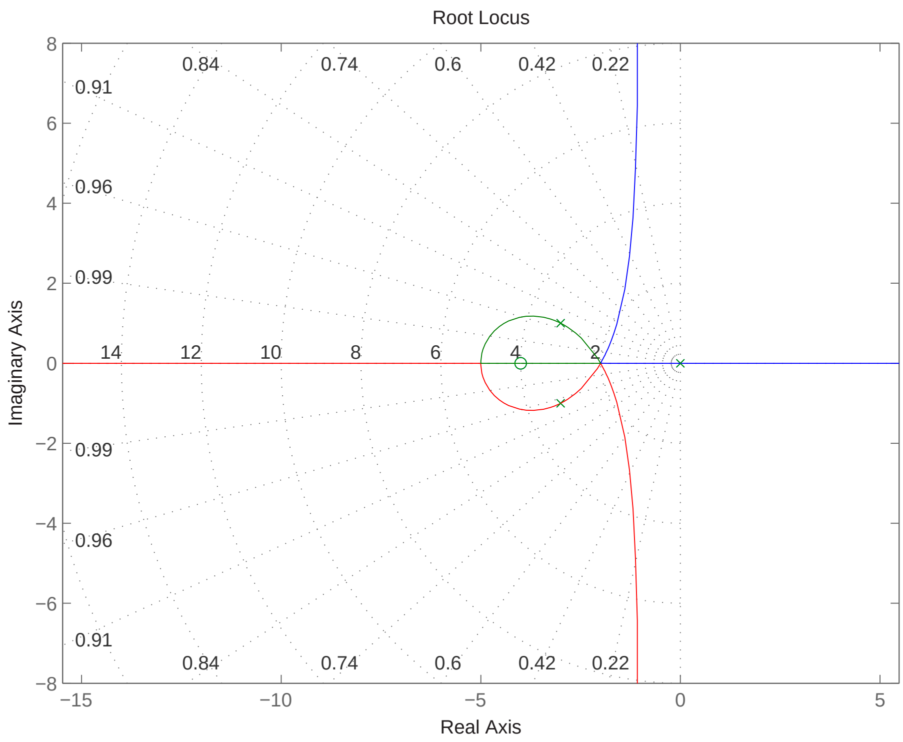
pour $\alpha = -1$ on retrouve bien l'asymptote. De plus il faut $(\alpha + 5)(\alpha + 1) < 0 \Rightarrow$ le lieu hors de l'axe est $\in [-5, -1]$.
Par exemple cherchons λ tel que $\omega = 0$, $\alpha = -2$

$$\lambda = -\frac{RD}{RN} = -\frac{-8 + 24 - 20}{2} = 2$$

d'où :

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0 = (x+2)^3$$

soit un pôle triple d'où le lieu suivant :



4 Application à l'automatique

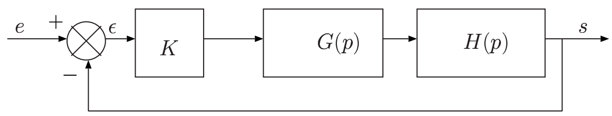
La fonction de transfert en BO peut s'écrire : $T_{BO}(p) = \frac{N(p)}{D(p)}.K$, K étant un gain variable d'où le dénominateur de la T_{BF} est :

$$1 + K.\frac{N(p)}{D(p)}$$

et si on cherche les racines en fonction de K :

$$D(p) + K.N(p) = 0$$

Le lieu d'Evans est alors la représentation de l'évolution des racines en fonction de K. En pratique on considère l'influence d'un gain K intervenant dans la boucle d'action d'un système asservi à retour unitaire.



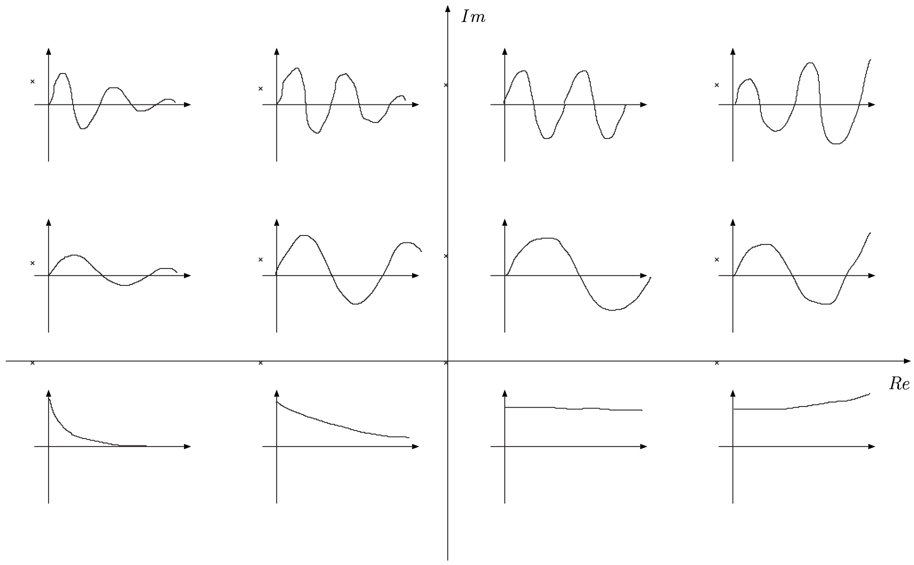
4.1 Stabilité

Si on utilise le lieu, la limite de stabilité est donnée lorsque ce dernier franchit l'axe des imaginaires, *i.e.* les racines sont à parties réelle nulle. Le domaine où la FTBF est stable est le demi plan gauche.

Comme $p = \alpha + j\omega$, la limite de stabilité est donnée par $\alpha = 0$ en dehors de l'axe, et $\alpha = \omega = 0$ sur l'axe.

4.2 Notion de systèmes à pôles dominants

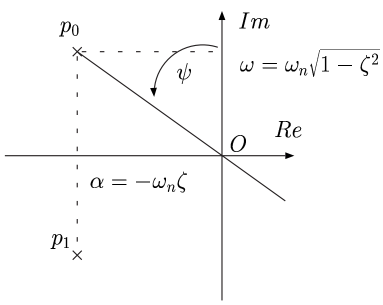
La contribution des pôles ou paire de pôles dans la réponse impulsionnelle globale du système dynamique



Plus un pôle stable est près de l'axe imaginaire, plus sa contribution au régime transitoire est importante.
Plus un pôle stable est éloigné de l'axe réel, plus le régime transitoire est oscillatoire.
Pour un deuxième ordre p_0 et p_1 sont solution de $p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2 = 0$ et $p_0 = \omega_n(-\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2})$ d'où

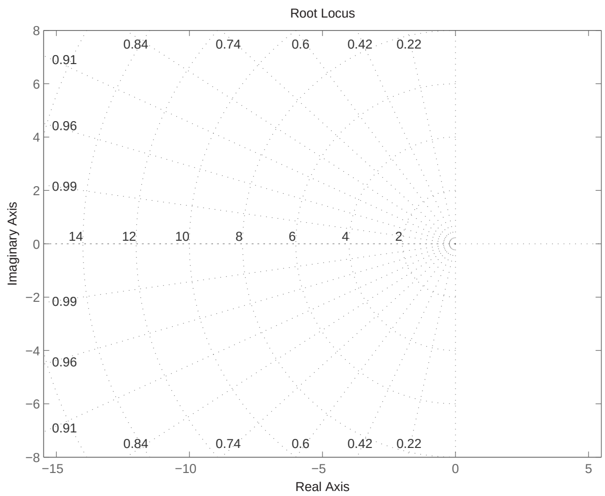
$$\sin\psi = \frac{\omega_n\zeta}{\omega_n\sqrt{\zeta^2 + 1 - \zeta^2}} \quad \Rightarrow \quad \sin\psi = \zeta$$

En général, pour un système du deuxième ordre on choisit $\zeta = 0,5$ qui correspond à une oscillation complète et de dépassement d'environ 16%. Ceci donne un déphasage $\psi = 30^\circ$.



En conséquence, si la fonction de transfert en BF d'un système d'ordre n possède deux pôles complexes conjugés à $\psi = 30^\circ$ et $n-2$ pôles situés sensiblement plus à gauche que ces deux derniers dans le plan complexe, le régime libre ne dépendra pratiquement que de ces 2 pôles. On dit que le système est à pôles dominants. Son comportement dynamique sera donc très voisin de celui du système fondamental du deuxième ordre.

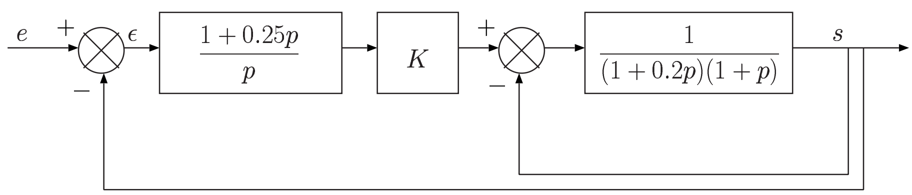
On peut donc par Evans, déterminer K tel que $\psi = 30^\circ$ pour avoir le système à pôles dominants. Ceci dit on peut aussi changer ζ.
Deplus $\sin\psi = \frac{\omega_n \zeta}{\omega_n} \quad \Rightarrow \quad \sin\psi = \zeta$, donc tous les pôles sur la droite définie par psi et passant par O ont le même amortissement.
L'hypothénnuse : $OP_1 = \omega_n$, tous les pôesl sur le demi cercle de centre O et de rayon quelconque R ont la même pulsation $\omega_n = R$. On peut donc représenter les courbes :
– iso-amortissement : demi-droite partant de O
– iso-pulsation ω_n : demi-cercle de rayon ω_n



Par exemple si on veut un dépassement de 16%, il faudra avoir $\zeta = 0,5$, donc les pôles sur la demi droite telle que $\sin\psi = 0,5 \quad \Rightarrow \quad \psi = 30^\circ$ (équation de la droite : $y = \tan(\frac{\pi}{2} + \psi)x = -\cot(\psi)x$ ici $y = -\sqrt{3}x$

4.3 Exemple

Soit le système suivant :



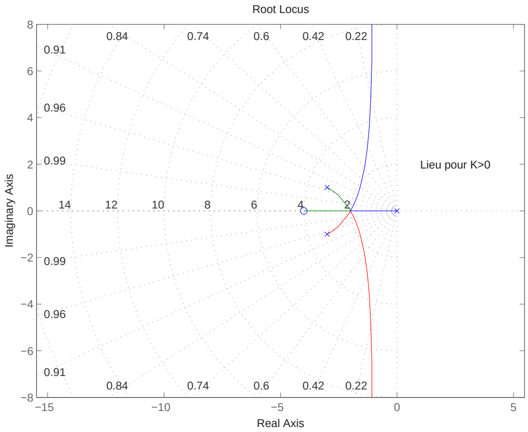
$$T_{BO}(p) = \frac{1+0,25p}{p}.\frac{K}{(1+1+1,2p+0,2p^2)()} = \frac{(1+0,25p)K}{2p(1+0,6p+0,1p^2)}$$

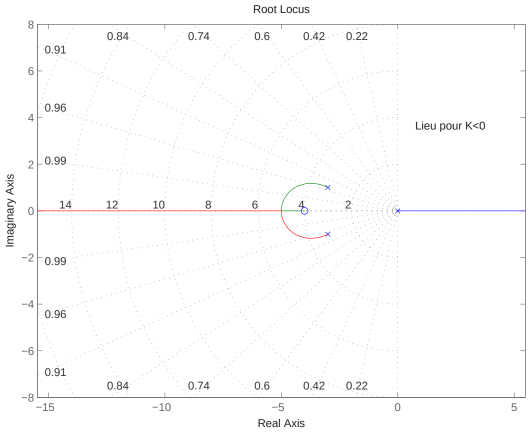
$$T_{BO}(p) = \frac{0,25(p+4)K}{0,2p(p^2+6p+10)} = 1,25K.\frac{p+4}{p(p^2+6p+10)}$$

D'où le sénominateur de la BF :

$$p^3 + 6p^2 + 10p + \lambda(p+4) = 0 \quad \lambda = 1,25K$$

On retrouve le lieu de l'exemple précédent.





Le stabilité de ce système peut être décrite de la manière suivante :

- So $\lambda < 0$ ($K < 0$), alors le système est toujours instable puisqu'une des racines est $\in$ du demi-plan droit ;
- Si $\lambda > 0$ ($K > 0$), toujours stable, toutes les racines sont $\in$ du demi-plan gauche.

Si on cherche un système à pôles dominants tel que $\zeta = 0,5$, on trace la droite correspondant à $\sin\psi = 0,5$.
Conditions des modules : $\frac{1}{|\lambda|} = \frac{\overline{PZ}}{\overline{PP_1}\,\overline{PP_2}\,\overline{PP_3}} = \frac{3,4}{2,4.3,6.2} \quad \Rightarrow \lambda = 5$ et $K = 4$
Par le calcul : $\omega = -\sqrt{3}\alpha$ (droite pour $\sin\psi = 0,5$) en ramplaçant dans l'équation $RD.IN = RN.ID$ on avait $\omega^2(\alpha+1) = -\alpha^3 - 9\alpha^2 - 24\alpha - 20$:

$$3\alpha^2(\alpha+1) = -\alpha^3 - 9\alpha^2 - 24\alpha - 20$$

$$4\alpha^3 + 12\alpha^2 + 24\alpha + 20 = 0$$

$$\alpha^3 + 3\alpha^2 + 6\alpha + 5 = 0$$

ce qui donne : $\alpha_0 = -1,32$ et $\omega_0 = 0,66$ en appliquant la condition sur les modules $\lambda = -\frac{RD(\alpha_0,\omega_0)}{RN(\alpha_0,\omega_0)}$on trouve $\lambda = 2,17$.

5 Cas ou $Z - P = 0$

Exemple : soit le système suivant :

$$T(p) = K.\frac{(p+1)(p+2)}{(p+5)(p+10)}$$

Dans ce cas $D(x) + \lambda N(x) = 0$ on a degré de D = degré de $N = n$
Nous avons donc 2 point de départs (pôles) -5 et -10
Nous avons 2 points d'arrivées (zéros) -1 et -2
Si $K > 0$: $[-10,-5] \cup [-2,-1] \in$ lieu pour le reste $K < 0$.
L'équation dégénère pour K fini : $K = -1$, donc on part du pôle -10 pour arriver à -1 (zéro) en passant pas l'∞.
Équation du lieu :

$$D = (5+\alpha+j\omega)(10+\alpha+j\omega) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} RD & = & (5+\alpha)(10+\alpha) - \omega^2 \\ ID & = & \omega(15+2\alpha) \end{array} \right.$$

$$N = (1+\alpha+j\omega)(2+\alpha+j\omega) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcc} RN & = & (1+\alpha)(2+\alpha)-\omega^2 \\ IN & = & \omega(3+2\alpha) \end{array} \right.$$

$\omega = 0 \longrightarrow$ tout l'axe

$$(2+3\alpha+\alpha^2-\omega^2)(15+2\alpha)-(50+15\alpha+\alpha^2-\omega^2)(3+2\alpha) = 0$$
$$\Rightarrow 120+96\alpha+12\alpha^2+12\omega^2 = 0$$
$$\Rightarrow 10+8\alpha+\alpha^2+\omega^2 = 0$$
$$\omega^2+(\alpha+4)^2 = 6$$

Cercle de centre $(-4,0)$ et de rayon $\sqrt{6}$.